

STUDIUL CIRCUITELOR DE CURENT ALTERNATIV FOLOSIND NUMERELE COMPLEXE

prof. Căpățînă Smaranda
Colegiul Național "Preparandia Dimitrie Țichindeal" Arad

- Un număr complex se poate scrie sub forma algebrică astfel:

$$z=a+ib \text{ unde } i=\sqrt{-1}, \text{ iar } i^2=-1, \text{ cu } a,b \in \mathbb{R}$$

$$\text{- modulul lui } z \text{ este dat de : } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

În fizică se va folosi litera j pentru că i este notația pentru intensitatea curentului electric. Deci vom scrie numărul complex de forma: $z=a+jb$, unde $j^2=-1$.

- Un număr complex se poate scrie sub forma exponențială astfel $z=|z| e^{j\varphi}$, unde $|z|$ este modulul său, e este baza logaritmilor naturali, φ este argumentul său. Această formă permite asocierea, în mod biunivoc, a unei funcții sinusoidale cu un număr complex.

- Un număr complex se poate scrie sub forma trigonometrică astfel: $z=|z| (\cos \varphi + j \sin \varphi)$, unde $\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$, iar $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$

Fie funcția sinusoidală $a=a_m \sin (\omega t+\varphi)$ unde a poate fi tensiune electrică sau intensitatea curentului electric și numărul complex $z=|z| e^{j\varphi}$. Unei mărimi sinusoidale i se asociază un număr complex numit complexul funcției, de modul egal cu amplitudinea mărimii fizice respective și argumentul egal cu faza ei.

Reprezentarea în complex prezintă avantajul că transformă ecuațiile trigonometrice în ecuații liniare.

O rețea de curent alternativ conține o grupare de rezistori, condensatori și bobine prin care trec curenți electrici care oscilează staționar cu frecvența ν și pulsația constantă ω . Una sau mai multe surse de tensiune electromotoare furnizează un curent electric alternativ sinusoidal. Printr-o ramură a rețelei, intensitatea curentului electric în funcție de timp este de forma $i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi_i)$, iar tensiunea electrică pe o anumită ramură variază după legea $u = U_{\max} \sin(\omega t + \varphi_u)$

Pentru rezolvarea problemelor am putea folosi metoda fazorială, dar în cazul rețelelor mai complexe, diagramele devin complicate și sunt dificil de analizat. Există, însă, o metodă de rezolvare simplă și elegantă, bazată pe ideea că orice mărime sinusoidală se poate reprezenta printr-un număr complex.

Vom atașa intensității $i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$ numărul complex $\bar{I} = I \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$ numit intensitate efectivă complexă. Analog tensiunea electrică alternativă se va reprezenta prin tensiunea efectivă complexă \bar{U} . Modulele acestor numere complexe sunt egale cu valorile efective ale mărimilor electrice corespunzătoare.

Analizăm comportarea principalelor elemente de circuit în cazul în care sunt străbătute de curent electric alternativ:

1. Rezistor

Aplicând unui rezistor o tensiune alternativă de forma $u = U_{\max} \sin \omega t$, intensitatea curentului va fi de forma $i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$.

Legea lui Ohm pentru valori momentane $u = u_R = iR$ conduce la $\varphi = 0$ și $U_{\max} = R \cdot I_{\max}$ sau $U_R = RI_R$.

Folosind numere complexe obținem:

$$\bar{I}_R = I_R \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t] \quad \text{și} \quad \bar{U}_R = U_R \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t]$$

Legea lui Ohm se scrie $\bar{U} = R\bar{I}$.

2. Bobină ideală

Dacă tensiunea aplicată este de forma $u = U_{\max} \sin \omega t$, intensitatea este $i = I_{\max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, iar legea lui Ohm pentru valori efective $U_L = X_L \cdot I_L$. Tensiunea și intensitatea complexă sunt:

$$\bar{U}_L = U_L [\cos \omega t + j \sin \omega t], \text{ respectiv}$$

$$\bar{I}_L = I_L \left[\cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Intensitatea complexă se poate scrie sub forma $\bar{I}_L = \frac{\bar{U}_L}{j\omega L}$, sau introducând reactanța inductivă complexă $\bar{X}_L = j\omega L$, se obține legea lui Ohm $\bar{U}_L = \bar{I}_L \cdot \bar{X}_L$

3. Condensator ideal

Dacă se aplică tensiunea alternativă $u = U_{\max} \sin \omega t$, unui condensator ideal, intensitatea curentului care îl străbate are forma $i = I_{\max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, egalitatea $U_C = X_C I_C$ reprezentând legea lui Ohm. Mărimile complexe:

$$\bar{U}_C = U_C [\cos \omega t + j \sin \omega t] \text{ și}$$

$$\bar{I}_C = I_C [\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + j \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})]$$

reprezintă tensiunea și intensitatea complexă. Intensitatea complexă se poate scrie sub forma $\bar{I}_C = \bar{U}_C j \omega C$. Notând $\bar{X}_C = \frac{1}{j \omega C}$, legea lui

Ohm se scrie $\bar{U}_C = \bar{I}_C \cdot \bar{X}_C$

4. Impedanța complexă

Prin definiție raportul $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$ este impedanța complexă a unei porțiuni de circuit.

Presupunem că $\bar{U} = U \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t]$ și $\bar{I} = I \cdot [\cos(\omega t - \varphi) + j \sin(\omega t - \varphi)]$.

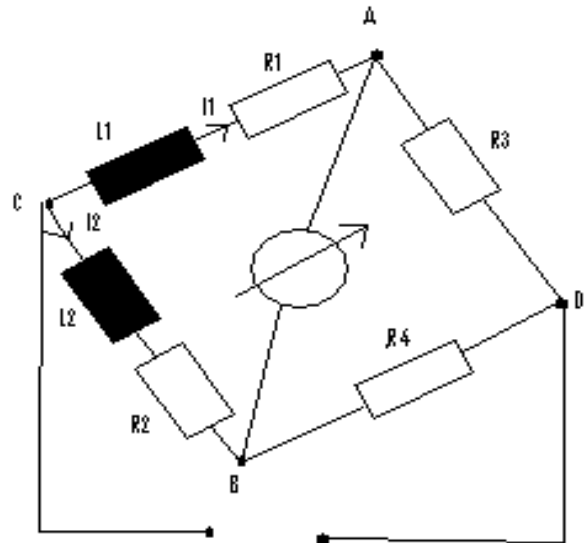
Impedanța complexă devine :

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Se observă că modulul său reprezintă impedanța reală, iar argumentul este defazajul dintre tensiune și curent. Partea reală a impedanței complexe reprezintă rezistența totală, iar cea imaginară reactanța totală.

PROBLEME REZOLVATE

1. In circuitul din figură, elementele R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , L_1 și L_2 sunt alese astfel încât prin ampermetru nu trece curent electric dacă circuitul este alimentat cu tensiune electrică continuă sau alternativă. Se cunosc: $R_1 = 450\Omega$, $R_3 = 300\Omega$, $R_4 = 60\Omega$ și $L_1 = 4500H$. Să se determine R_2 și L_2 .



Se folosește exprimarea cu numere complexe:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4$$

Dacă prin ampermetru nu trece curent electric:

$$\left. \begin{aligned} V_A = V_B &\Rightarrow U_{AC} = U_{CB} \Leftrightarrow I_1 Z_1 = I_2 Z_2 \\ V_A = V_B &\Rightarrow U_{AD} = U_{BD} \Leftrightarrow I_1 Z_3 = I_2 Z_4 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \Leftrightarrow (R_1 + j\omega L_1) R_4 = (R_2 + j\omega L_2) R_3$$

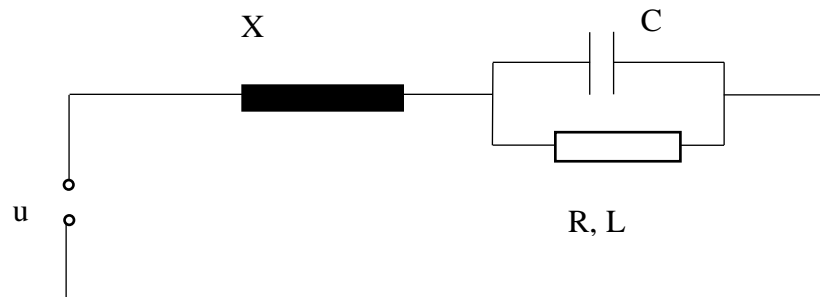
$$R_1 R_4 + j\omega L_1 R_4 = R_2 R_3 + j\omega L_2 R_3$$

Pentru ca două numere complexe să fie egale este necesar ca părțile reale să fie egale între ele și părțile imaginare să fie egale între ele.

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{R_3} \cdot R_4 = 90\Omega$$

$$j\omega L_1 R_4 = j\omega L_2 R_3 \Rightarrow L_2 = \frac{R_4}{R_3} \cdot L_1 = 900H$$

2. Pentru circuitul prezentat în figură curentul și tensiunea electrică sunt în fază la frecvența de 400Hz. Se cere valoarea reactanței X și caracterul ei. Se dă: $L=50\text{mH}$, $R=25\ \Omega$, $C=0,8\ \mu\text{F}$.



Se folosește exprimarea cu numere complexe:

$$Z=jX$$

$$Z_1=R+jX_L$$

$$Z_2= - j X_C$$

$$Z_{ech}=R_{ech}+jX_{ech}$$

Dacă curentul și tensiunea electrică sunt în fază, atunci $\varphi = 0$,

$$tg\varphi = \frac{X_{ech}}{R_{ech}} = 0 \Rightarrow X_{ech}=0$$

$$\text{Dar } Z_{ech}= Z+ \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_{ech}= jX + \frac{(R+jX_L)(-jX_C)}{R+jX_L-jX_C}$$

După efectuarea calculelor matematice se va obține:

$$X_{ech}=X- \frac{R^2 X_C - X_L^2 X_C + X_L X_C^2}{R^2 - (X_L - X_C)^2} \quad \left. \vphantom{\frac{R^2 X_C - X_L^2 X_C + X_L X_C^2}{R^2 - (X_L - X_C)^2}} \right\}$$

$$X_{ech}=0$$

$$\Rightarrow X = \frac{R^2 X_C - X_L^2 X_C + X_L X_C^2}{R^2 - (X_L - X_C)^2}$$

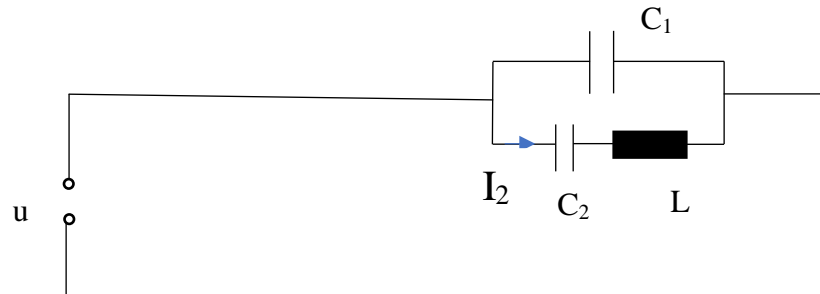
Ținem cont că :

$$X_L=L \omega=L 2\pi\nu= 40 \pi \Omega$$

$$X_C=\frac{1}{C \omega} = \frac{1}{C 2 \pi \nu} = \frac{10^5}{64 \pi} \Omega$$

Se obține $X=-164\ \Omega$. Semnul (-) ne arată că elementul are caracter capacitiv.

3. Circuitul din figura de mai jos e format din doi condensatori C_1 , C_2 și o bobină de inductanță L și este alimentat cu o tensiune sinusoidală u de pulsație ω . Să se stabilească expresia modului impedanței complexe și să se calculeze curentul I_2 .



Notăm cu Z impedanța complexă echivalentă

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ Z_1 &= -j X_{C1} \\ Z_2 &= j(X_L - X_{C2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z = \frac{j X_{C1} (X_{C1} - X_L)}{X_L - X_{C1} - X_{C2}}$$

Modulul impedanței complexe îl notăm cu $|Z|$

$$\left. \begin{aligned} |Z| &= \frac{X_{C1} (X_{C1} - X_L)}{X_L - X_{C1} - X_{C2}} \\ X_{C1} &= \frac{1}{C_1 \omega} \\ X_{C2} &= \frac{1}{C_2 \omega} \\ X_L &= L \omega \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow |Z| = \frac{1 - \omega^2 L C_2}{\omega (\omega^2 L C_1 C_2 - C_1 - C_2)}$$

Valoarea complexă a intensității I_2 este dată de:

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \frac{U}{Z_2} \\ Z_2 &= j(X_L - X_{C2}) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{U}{j(X_L - X_{C2})} = \frac{-j U}{X_L - X_{C2}}$$

$$\text{Modulul lui } I_2 \text{ este: } |I_2| = \frac{U}{X_L - X_{C2}} = \frac{U}{\left| L \omega - \frac{1}{C_2 \omega} \right|}$$

Bibliografie:

1. <https://manuale.edu.ro/manuale/Clasa%20a%20XI-a/Fizica/Niculescu/A144.pdf>
2. Gabriela Cone și Gheorghe Stanciu, Probleme de fizică, Editura Academiei, 1988
3. Ioan Barbur, Dorina Strugaru Culegere de probleme de electricitate si magnetism, Editura didactică și pedagogică Bucuresti, 1974